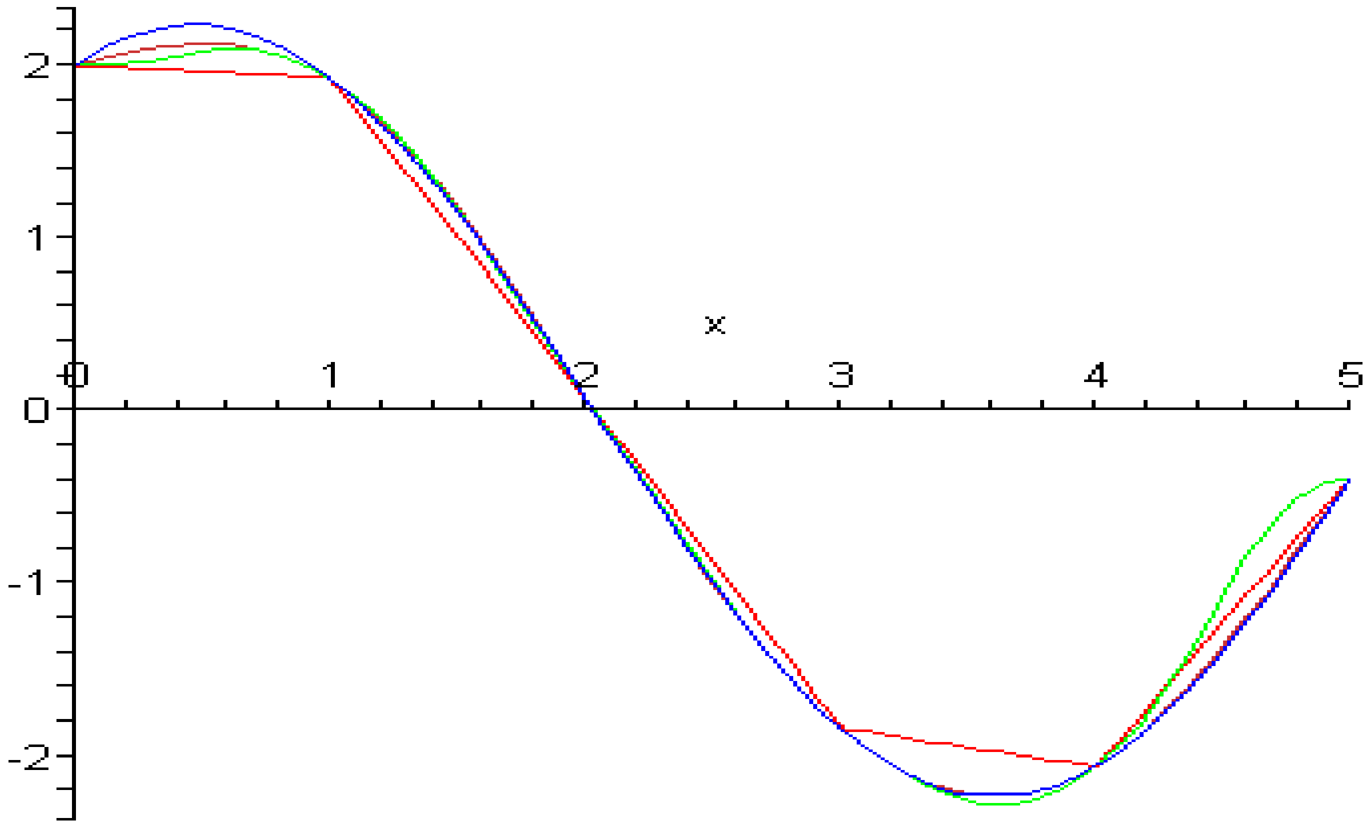
# ΤΕΙ ΑΘΗΝΑΣ ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά 3η εργαστηριακή άσκηση





ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ:

ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΝΤΩΝΗΣ

Α.Μ. 09036 Εξάμηνο ΠΤΧ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΔΡ. ΜΠΡΑΤΣΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

# Περιεχόμενα

## 3.1 Πολυωνυμική παρεμβολή

Το πρώτο ερώτημα της 3η εργασίας είναι η εύρεση πολυωνύμου με την μέθοδο Lagrange και την μέθοδο Newton.

Η εκφώνηση του πρώτου ερωτήματος αναφέρει το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Με θεωρητική τιμή $I \approx 0.746824$

και κόμβους στα σημεία.

$$x_0 = 0 \ , \quad x_1 = 0.3 \ , \quad x_2 = 0.6 \ , \quad x_3 = 1$$

### 3.1.1 Πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

Ο γενικός τύπος υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής με την μέθοδο Lagrange φαίνεται παρακάτω:

$$P_n(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + \ldots + l_n(x)f(x_n)$$

Για την εύρεση των $l_i(x)$ χρησιμοποιείτε ο παρακάτω γενικός τύπος:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Η εκφώνηση, όπως ανέφερα παραπάνω, δίνει κόμβους σε 4 σημεία άρα είναι 3ου βαθμού

$$P_3(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) + l_3(x)f(x_3)$$

Με βάση τον γενικό τύπο για τον υπολογισμό των $l_i(x)$ έχουμε:

$$\boldsymbol{l_0(x)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} =$$

$$= \frac{(x - 0.3)(x - 0.6)(x - 1)}{(0 - 0.3)(0 - 0.6)(0 - 1)} =$$

$$= \frac{(x^2 - 0.6x - 0.3x + 0.18)(x - 1)}{-0.18} =$$

$$= \frac{x^3 - 0.6x^2 - 0.3x^2 + 0.18x - x^2 + 0.6x + 0.3x - 0.18}{-0.18}$$

$$= -5.55556x^3 + 3{,}33333x^2 + 1.66667x^2 - x + 5.55556x^2 - 3.33333x - 1.66667x + 1 =>$$

$$\boldsymbol{l_0(x) = -5.55556x^3 + 10.55556x^2 - 6x + 1}$$

$$\boldsymbol{l_1(x)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} =$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 0.6)(x - 1)}{(0.3 - 0)(0.3 - 0.6)(0.3 - 1)} =$$

$$= \frac{x^3 - 0.6x^2 - x^2 - 0.6x}{0.063} =>$$

$$\boldsymbol{l_1(x) = 15.87302x^3 - 25.39683x^2 + 9.52381x}$$

$$\boldsymbol{l_2(x)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} =$$

$$= \frac{(x - 0)(x - 0.3)(x - 1)}{(0.6 - 0)(0.6 - 0.3)(0.6 - 1)} =$$

$$= \frac{x^3 - x^2 - 0.3x^2 + 0.3x}{-0.072} =$$

$$= \frac{x^3 - 1.3x^2 + 0.3x}{-0.072} =>$$

$$\boldsymbol{l_2(x) = -13.88889x^3 + 18.05556x^2 - 4.16667x}$$

$$\boldsymbol{l_3(x)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$= \frac{(x-0)(x-0.3)(x-0.6)}{(1-0)(1-0.3)(1-0.6)} =$$

$$= \frac{x^3 - 0.9x^2 + 0.18x}{0.28} =>$$

$$\boldsymbol{l_3(x) = 3.57143x^3 - 3.21429x^2 + 0.64286x}$$

$$P_3(x) = l_0(x)e^0 + l_1(x)e^{-0.3^2} + l_2(x)e^{-0.6^2} + l_3(x)e^{-1^2}$$

Μετά από αντικατάσταση

$$\begin{aligned} P_3(x) = {} & (-5.55556x^3 + 10.55556x^2 - 6x + 1)e^0 \\ & + (15.87302x^3 - 25.39683x^2 + 9.52381x)e^{-0.3^2} \\ & + (-13.88889x^3 + 18.05556x^2 - 4.16667x)e^{-0.6^2} \\ & + (3.57143x^3 - 3.21429x^2 + 0.64286x)e^{-1^2} => \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) = {} & -5.55556x^3 + 10.55556x^2 - 6x + 1 - 14.50685x^3 - 23.59694x^2 + 8.70411x \\ & - 9.68995x^3 + 12.59694x^2 - 2.90699x + 1.313856x^3 - 1.18247x^2 \\ & + 0.23650x => \end{aligned}$$

Άρα, το πολυώνυμο με την μέθοδο Lagrange έχει την παρακάτω μορφή:

$$\boldsymbol{P_3(x) = 0.57519x^3 - 1.24093x^2 + 0.03362x + 1}$$

Συνεπώς η λύση του ολοκληρώματος με την βοήθεια του πολυωνύμου είναι:

$$I_L = \int_0^1 P_3(x)dx =$$

$$= \int_0^1 (0.57519x^3 - 1.24093x^2 + 0.03362x)dx =$$

$$= 0.57519\frac{x^4}{4} - 1.24093\frac{x^3}{3} + 0.03362\frac{x^2}{2} + x =>$$

$$I = 0.57519\frac{1^4}{4} - 1.24093\frac{1^3}{3} + 0.03362\frac{1^2}{2} + 1 =>$$

$$\boldsymbol{I = 0.746963}$$

Το σφάλμα, η σύγκριση της τιμής που βρέθηκε με την θεωρητική τιμή είναι:

$$\boldsymbol{e = |0.746963 - 0.746824| = 0.000139}$$

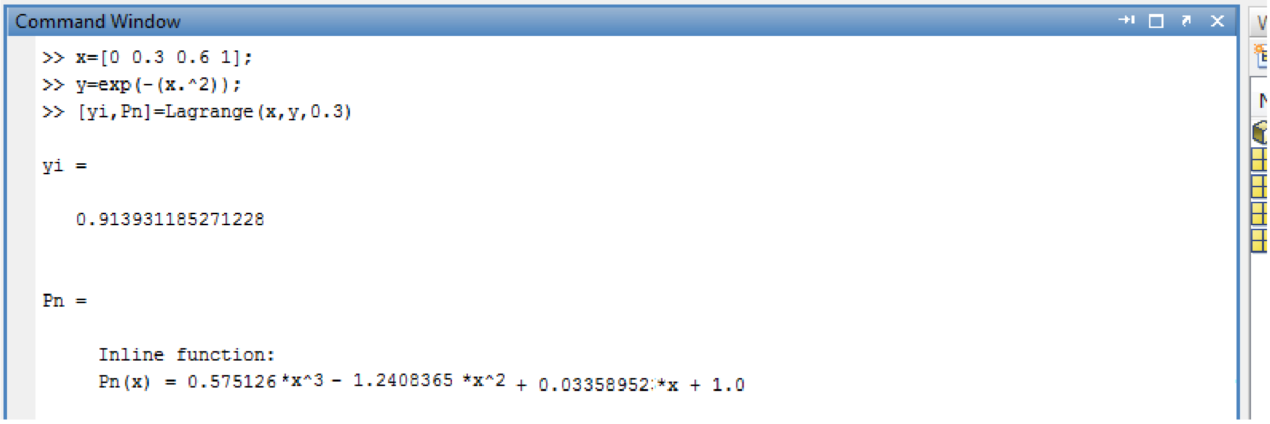
#### 3.1.1.1 Υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής με την βοήθεια του Matlab.

Για την δημιουργία των προγραμμάτων όλης της εργασίας, συνεργάστηκα με τον συμφοιτητή Χιονάτο Μιχάλη, ο οποίος επίσης παρακολουθεί το μάθημα. Για να μπορέσουμε να παρουσιάσουμε όσο γίνεται αρτιότερα προγράμματα χρειάστηκε να συνεργαστούμε, διότι οι γνώσεις που είχε ο καθένας μόνος του για τον τέλειο προγραμματισμό των προγραμμάτων που θα ακολουθήσουν δεν επαρκούσαν. Πιστεύουμε πως το αποτέλεσμα, ήταν το καλύτερο δυνατό.

Έτσι λοιπόν δημιουργήσαμε την παρακάτω Function:

```
function [yi,Pn]=Lagrange(xs,ys,x)
n=length(xs);
if length(ys)~=n,error('x and y must have same size');
end
yi=0;
Pn='0';
for i=1:n
    l=ys(i);
    type=num2str(ys(i));
    for j=1:n
        if (i~=j)
            l=l*(x-xs(j))/(xs(i)-xs(j));
            type=[type,'*(x-
',num2str(xs(j)),')/(',num2str(xs(i)),'-',num2str(xs(j)),')'];
        end
    end
    yi=yi+l;
    Pn=[Pn,'+',type];
end
Pn=sym(Pn);
Pn=simplify(Pn);
```

Μέσα σε αυτή την Function έχει μπει μέσα όλη η θεωρία της μεθόδου και το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.




Εικόνα 1 Αποτελέσματα Function υπολογισμού πολυωνύμου παρεμβολής Legrange

Όπως είναι φανερό, το μόνο που χρειάζεται να κάνει ο χρήστης, είναι να εισάγει τις συντεταγμένες, και το πρόγραμμα δίνει κατευθείαν το πολυώνυμο. Χωρίς κόπο, χωρίς πράξεις. Το πολυώνυμο που φαίνεται στο Command Window είναι:

$$\boldsymbol{P_n(x) = 0.575126x^3 - 1.2408365x^2 + 0.03358952x + 1}$$

Και το πολυώνυμο που βρήκα παραπάνω είναι:

$$\boldsymbol{P_3(x) = 0.57519x^3 - 1.24093x^2 + 0.03362x + 1}$$

Πολύ μικρές διαφορές, οι οποίες οφείλονται σε αριθμητικά σφάλματα.

### 3.1.2 Πολυώνυμο παρεμβολής του Newton

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή και ως μέθοδος των διαιρεμένων διαφορών.

Η διαιρεμένη διαφορά k-τάξης στα σημεία $x_i, x_{i+1} \ldots . x_{i+k}$ ισούται με:

$$f(x_i, x_{i+1} \ldots x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2} \ldots x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1} \ldots x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω γενικό τύπο, δημιουργήθηκε το παρακάτω πινακάκι.

Η άσκηση αναφέρει πως θα χρησιμοποιηθούν οι ίδιοι κόμβοι με το πρώτο ερώτημα.

Συνεπώς, στην πρώτη στήλη βρίσκονται οι τιμές των x και στην δεύτερη στήλη οι τιμές των y όπου $y_i = e^{-x_i^2}$ . Στις επόμενες στήλες, έγινε χρήση του παραπάνω γενικού τύπου και βγήκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

| x | y | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | f(x<sub>0</sub>,x<sub>1</sub>) | | |
| | | -0,28690 | f(x<sub>0</sub>,x<sub>1</sub>,x<sub>2</sub>) | |
| 0,3 | 0,913931 | | -0,72326 | f(x<sub>0</sub>,x<sub>1</sub>,x<sub>2</sub>,x<sub>3</sub>) |
| | | -0,72085 | | 0,57519 |
| 0,6 | 0,697676 | | -0,148061 | |
| | | -0,824492 | | |
| 1 | 0,367879 | | | |

Έχουμε 4 σημεία, άρα είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού. Συνεπώς ο γενικός τύπος υπολογισμού του πολυωνύμου είναι:

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_{0,}x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = 1 - 0.2869(x - 0) - 0.72326(x - 0)(x - 0.3) + 0.575165(x - 0)(x - 0.3)(x - 0.6) =>$$

$$P_3(x) = 1 - 0.2869x - 0.72326x^2 + 0{,}21698x + 0.575165x^3 - 0.345099x^2 - 0{,}17255x^2 + 0.10353x =>$$

Άρα το πολυώνυμο με την μέθοδο του Newton είναι:

$$\boldsymbol{P_3(x) = 0.57517x^3 - 1.24091x^2 + 0.03361x + 1}$$

Σύγκριση αποτελέσματος με την θεωρητική τιμή:

$$I_N = \int_0^1 P_3(x)dx =$$

$$= \int_0^1 (0.57517x^3 - 1.24091x^2 + 0.03361x)dx \; =$$

$$= \; 0.57517\frac{x^4}{4} - 1.24091\frac{x^3}{3} + 0.03361\frac{x^2}{2} + x \; =>$$

$$I = 0.57517\frac{1^4}{4} - 1.24091\frac{1^3}{3} + 0.03361\frac{1^2}{2} + 1 =>$$

$$\boldsymbol{I = 0.746960}$$

Το σφάλμα σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\boldsymbol{e = |0.746960 - 0.746824| = 0.0001362}$$

Παρατηρούμε μια μικρή διαφορά στα αποτελέσματα των δυο μεθόδων. Η μέθοδος του Newton είναι σαφώς γρηγορότερη, με λιγότερες πράξεις, άρα και μικρότερο σφάλμα.

| **Μέθοδος** | **Αποτελέσματα** | **Σφάλμα** |
|---|---|---|
| **Lagrange** | $\boldsymbol{0.746963}$ | **0.000139** |
| **Newton** | **0.74690** | **0.0001362** |

### 3.1.2.1 Υπολογισμός πολυωνύμου παρεμβολής του Newton με Matlab.

Και εδώ όπως παραπάνω, δημιουργήθηκε πρόγραμμα, το οποίο το εμφανίζω αμέσως παρακάτω:

```
function [yi, D, d, Pn] = newton_polyn(xi, y, x)
k = length(xi);
d=y';
for j=2:k
    for i=j:k
        d(i,j)= ( d(i-1,j-1)-d(i,j-1)) / (xi(i-j+1)-xi(i));
    end
end
D = diag(d)';

Df(1,:) = ones(size(x));
```

```
c(1,:) = repmat(D(1), size(x));
for j = 2 : k
   Df(j,:)=(x - xi(j-1)) .* Df(j-1,:);
   c(j,:) = D(j) .* Df(j,:);
end
yi=sum(c);


n=length(D);
    Pn=['1+(-0.2869)*(x-0)+(-0.72326)*(x-0)*(x-0.3)+0.57519*(x-
0)*(x-0.3)*(x-0.6)'];
Pn=sym(Pn);
Pn=simplify(Pn);
Pn=inline(char(Pn));
```

Τα αποτελέσματα του προγράμματος φαίνονται παρακάτω:

```
Command Window
>> [yi, D, d, Pn] = newton_polyn(x, y, 0.3)

yi =

   0.913931185271228


D =

   1.000000000000000  -0.286896049095906  -0.723255802619030   0.575194828930962


d =

   1.000000000000000                   0                   0                   0
   0.913931185271228  -0.286896049095906                   0                   0
   0.697676326071031  -0.720849530667324  -0.723255802619030                   0
   0.367879441171442  -0.824492212248972  -0.148060973688068   0.575194828930962


Pn =

     Inline function:
     Pn(x) = 0.57519*x^3 - 1.240931*x^2 + 0.0336122*x + 1
```

Εικόνα 2 Αποτελέσματα Function υπολογισμού πολυωνύμου παρεμβολής με την μέθοδο του Newton

Πάρα πολύ μικρές διαφορές με την προηγούμενη μέθοδο. Σχεδόν πανομοιότυπα αποτελέσματα.

Για καλύτερη σύγκριση παρακάτω φαίνονται και τα δυο πολυώνυμα:

Μέθοδος Newton με το χέρι:

$$\boldsymbol{P_3(x) = 0.57517x^3 - 1.24091x^2 + 0.03361x + 1}$$

Μέθοδος Newton με την βοήθεια του Matlab

$$\boldsymbol{P_n(x) = 0.57519x^3 - 1.240931x^2 + 0.0336122x + 1}$$

### 3.1.3 Απόδειξη του παρακάτω.

Τα σημεία $x_0, x_{1,}x_2$ $και$ $x_3$ ισαπέχουν. Δηλαδή, $h = x_{+1} - x_i$ για κάθε $\iota = 0\,,1\,,2\,,3$

Να δείξουμε, ότι

$$2!\,f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$$

Και

$$3!\,f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{h^3}[-f(x_0) + 3f(x_1) - 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Με βάση τον προς τα εμπρός τύπος διαιρεμένων διαφορών του Newton το πολυώνυμο γράφεται

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{S}{k} k!\,h^k f[x_0, x_1, \dots x_k]$$

Όπως λέει η θεωρία, μπορούμε να εισάγουμε τον συμβολισμό Δ για τις προς τα εμπρός διαιρεμένες διαφορές, και έτσι λοιπόν:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h}\Delta^2 f(x_0)$$

Η γενική μορφή είναι:

$$f[x_0, x_1, \dots x_k] = \frac{1}{k!\,h^k}\Delta^k f(x_0)$$

Έτσι λοιπόν, ο παραπάνω τύπος μετατρέπεται:

$$k!\,f[x_0, x_1, \dots x_k] = \frac{1}{h^k}\Delta^k f(x_0)$$

Παρατηρώντας όλα τα παραπάνω, συνειδητοποιούμε ότι στο συμβολισμό Δ είναι υψωμένη η δύναμη k. Έχοντας στο μυαλό μας ότι το Δ δεν είναι ένας έτοιμος αριθμός, αλλά μία διαφορά, εύκολα τελικά λέμε ότι δημιουργείται μία ταυτότητα.

Έτσι λοιπόν, για k=2

$$2!\,f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2} =>$$

$$2!\,f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$$

Και για k=3

$$3!\,f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3} =>$$

$$3!\,f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{h^3}[-f(x_0) + 3f(x_1) - 3f(x_2) + f(x_3)]$$

## 3.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.

### 3.2.1 Πολυώνυμο 1ου βαθμού

Στην άσκηση αυτή πρέπει να υπολογίσω το πολυώνυμο 1ου βαθμού με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Το πολυώνυμο είναι της μορφής:

$$P(x_i) = ax_i + b$$

Είναι φανερό, πως όπως λέει και ο τύπος του πολυωνύμου, με την παραπάνω τύπο, θα δημιουργηθεί μια ευθεία.

Το “α” και το “b” του παραπάνω τύπου, υπολογίζεται από τους παρακάτω τύπους:

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_1) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

και

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Στην συγκεκριμένη άσκηση, δίδονται τα παρακάτω δεδομένα:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.500 | 0.150 | 0.250 | 0.400 | 0.550 | 0.700 |
| $y_i$ | 1.235 | 1.750 | 2.020 | -1.550 | -2.345 | 0.435 |

Με τα παραπάνω δεδομένα, δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας:

| i | $x_i$ | $y_i$ | $x_iy_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,500 | 1,235 | 0,6175 | 0,250 |
| 2 | 0,150 | 1,750 | 0,2625 | 0,023 |
| 3 | 0,250 | 2,020 | 0,505 | 0,063 |
| 4 | 0,400 | -1,550 | -0,62 | 0,160 |
| 5 | 0,550 | -2,345 | -1,28975 | 0,303 |
| 6 | 0,700 | 0,435 | 0,3045 | 0,490 |
| Σ | 2,550 | 1,545 | -0,22025 | 1,288 |

**Εικόνα 3 Πίνακας υπολογισμού πολυωνύμου 1ου βαθμού με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.**

Εφαρμόζοντας λοιπόν τους γενικούς τύπους για τον υπολογισμό του “α” και του “b” παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\alpha = \frac{6 * (-0.22025) - 2.550 * 1.545}{6 * 1.288 - 2.550^2} =>$$

$$\boldsymbol{a = -4.29437}$$

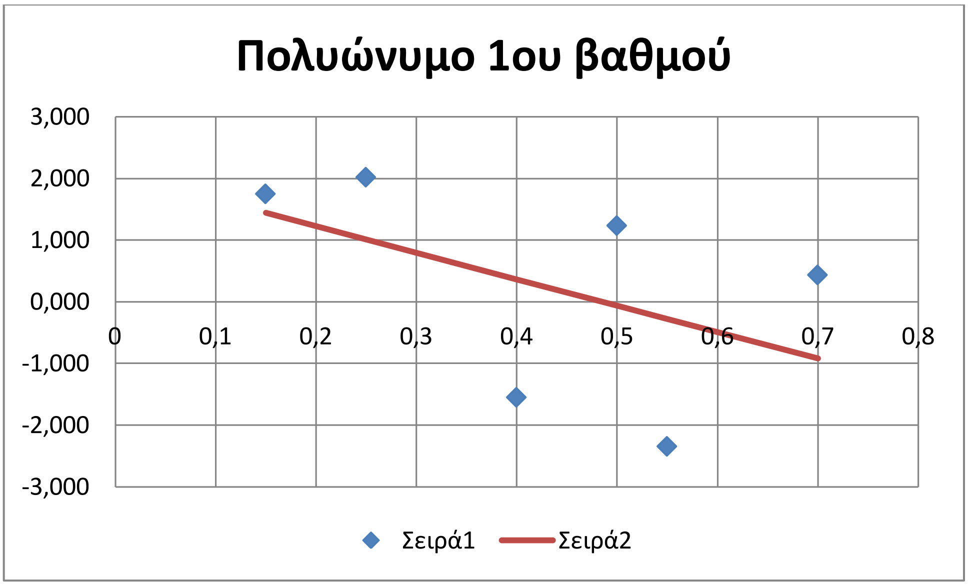
$$b = \frac{1.288 * 1.545 - (-0.2205) * 2.550}{6 * 1.288 - 2.550^2}$$

$$\boldsymbol{b = 2.08261}$$

Έχοντας υπολογίσει όλα τα παραπάνω, το πολυώνυμο παίρνει την εξής μορφή:

$$\boldsymbol{P(x_i) = -4.29437x_i + 2.08261}$$

Η αμέσως επόμενη εικόνα, είναι η γραφική παράσταση του πολυωνύμου 1ου βαθμού που μόλις υπολογίστηκε:




Εικόνα 4 Γραφική παράσταση πολυωνύμου 1ου βαθμού με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Το ολικό σφάλμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$e_i = |y_i - (ax_i + b)|$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος, δημιούργησα το παρακάτω πινακάκι:

| $x_i$ | $y_i$ | $ax_i + b$ | $e_i$ |
|---|---|---|---|
| 0,500 | 1,750 | 1,438452 | 0,312 |
| 0,150 | 2,020 | 1,009015 | 1,011 |
| 0,250 | -1,550 | 0,364859 | -1,915 |
| 0,400 | 1,235 | -0,06458 | 1,300 |
| 0,550 | -2,345 | -0,2793 | -2,066 |
| 0,700 | 0,435 | -0,92345 | 1,358 |
| | | Σ | 0,00000 |

Εικόνα 5 Υπολογισμός σφάλματος σε πολυώνυμο 1ου βαθμού.

Με βάση τον παραπάνω τύπο, το σφάλμα σε αυτή την περίπτωση, είναι, όπως φαίνεται και στο πινακάκι: $\boldsymbol{e_i = 0{,}00000}$

## 3.2.2 Πολυώνυμο 2ου βαθμού

Αντίστοιχα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων που προσέγγιζε τα δεδομένα με πολυώνυμο 1ου βαθμού, αυτή την φορά θα προσεγγιστούν με πολυώνυμο 2ου βαθμού.

Τα δεδομένα είναι τα ίδια και φαίνονται πάλι στον παρακάτω πίνακα.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.500 | 0.150 | 0.250 | 0.400 | 0.550 | 0.700 |
| $y_i$ | 1.235 | 1.750 | 2.020 | -1.550 | -2.345 | 0.435 |

Τα σημεία είναι n=6. Σύμφωνα με την συνθήκη της θεωρίας για τα πολυώνυμα m-βαθμού, ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός του πολυωνύμου μπορεί να είναι:

$$m < 6 - 1$$

Εμείς εδώ, θέλουν το πολυώνυμο να είναι 2^ου^ βαθμού, συνεπώς:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Έχοντας τα παραπάνω σημεία, δημιουργείτε ο παρακάτω πίνακας:

| i | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $x_i^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,500 | 1,235 | 0,6175 | 0,250 | 0,125 | 0,063 | 0,30875 |
| 2 | 0,150 | 1,750 | 0,2625 | 0,023 | 0,003 | 0,001 | 0,039375 |
| 3 | 0,250 | 2,020 | 0,505 | 0,063 | 0,016 | 0,004 | 0,12625 |
| 4 | 0,400 | -1,550 | -0,62 | 0,160 | 0,064 | 0,026 | -0,248 |
| 5 | 0,550 | -2,345 | -1,28975 | 0,303 | 0,166 | 0,092 | -0,70936 |
| 6 | 0,700 | 0,435 | 0,3045 | 0,490 | 0,343 | 0,240 | 0,21315 |
| Σ | 2,550 | 1,545 | -0,22025 | 1,288 | 0,717 | 0,424 | -0,270 |

**Εικόνα 6  Πίνακας υπολογισμού πολυώνυμου 2ου βαθμού με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων**

Το σύστημα για τον υπολογισμό του πολυωνύμου είναι:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \sum_{i=1}^{6} x_i^0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{6} x_i^1 + \alpha_2 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{6} y_i x_i^0 \\
\alpha_0 \sum_{i=1}^{6} x_i^1 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \alpha_2 \sum_{i=1}^{6} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{6} y_i x_i^1 \\
\alpha_0 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{6} x_i^3 + \alpha_2 \sum_{i=1}^{6} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{6} y_i x_i^2
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το παραπάνω σύστημα, και τον πίνακα της εικόνας 6  έχουμε:

$$\begin{aligned} 6\alpha_0 &+ 2.550\alpha_1 + 1.288\alpha_2 &= 1.545 \\ 2.550\alpha_0 &+ 1.288\alpha_1 + 0.717\alpha_2 &= -0.220 \\ 1.288\alpha_0 &+ 0.717\alpha_1 + 0.424\alpha_2 &= -0.270 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα γραμμικό σύστημα με 3 αγνώστους και 3 εξισώσεις.

Για την γρήγορη επίλυσή του θα χρησιμοποιήσω το πρόγραμμα υπολογισμού γραμμικών συστημάτων του Gauss-Seidel που έχω ήδη δημιουργήσει.

Το σύστημα, αναλύεται στους παρακάτω πίνακες:

Τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων:

```
A =

   6.000000000000000   2.550000000000000   1.288000000000000
   2.550000000000000   1.288000000000000   0.717000000000000
   1.288000000000000   0.717000000000000   0.424000000000000
```

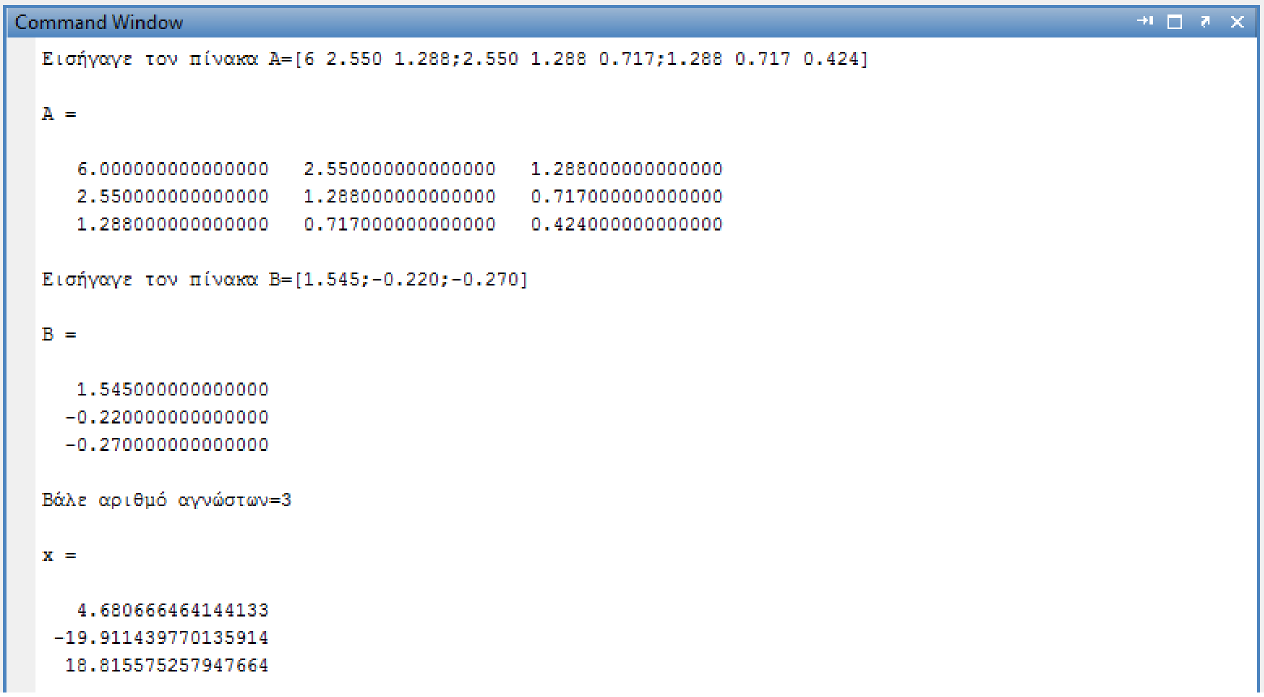
Τον πίνακα των αποτελεσμάτων:

```
B =

   1.545000000000000
  -0.220000000000000
  -0.270000000000000
```

Μετά από το τρέξιμο του προγράμματος, οι άγνωστοι έχουν την παρακάτω μορφή:

```
x =

   4.680666464144133
 -19.911439770135914
  18.815575257947664
```

Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στο Command Window του Matlab.



```
Command Window
Εισήγαγε τον πίνακα A=[6 2.550 1.288;2.550 1.288 0.717;1.288 0.717 0.424]

A =

   6.000000000000000   2.550000000000000   1.288000000000000
   2.550000000000000   1.288000000000000   0.717000000000000
   1.288000000000000   0.717000000000000   0.424000000000000

Εισήγαγε τον πίνακα B=[1.545;-0.220;-0.270]

B =

   1.545000000000000
  -0.220000000000000
  -0.270000000000000

Βάλε αριθμό αγνώστων=3

x =

   4.680666464144133
 -19.911439770135914
  18.815575257947664
```

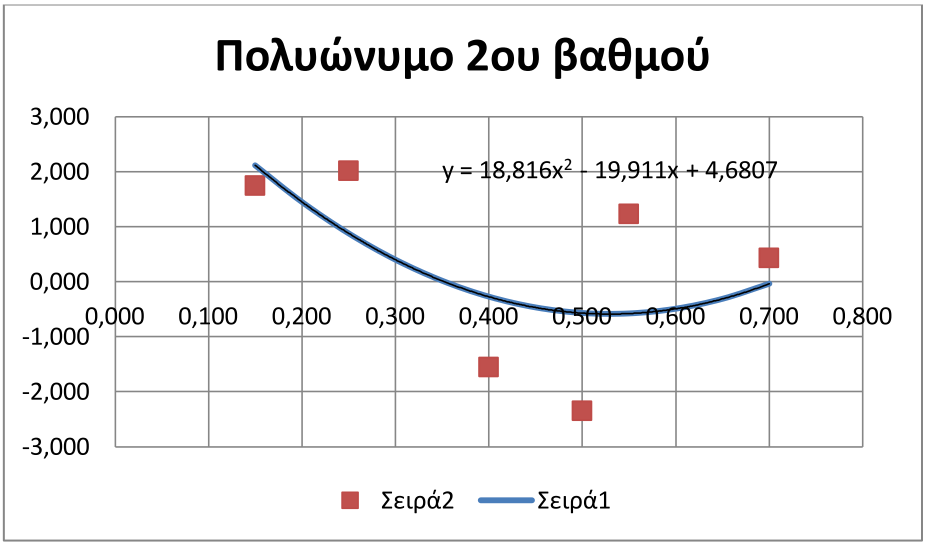
Οι άγνωστοι συνεπώς είναι οι παρακάτω:

| | |
|---|---|
| $\alpha_0$ | 4.68067 |
| $\alpha_1$ | -19.91144 |
| $\alpha_2$ | 18.81558 |

Άρα λοιπόν το πολυώνυμο είναι το εξής:

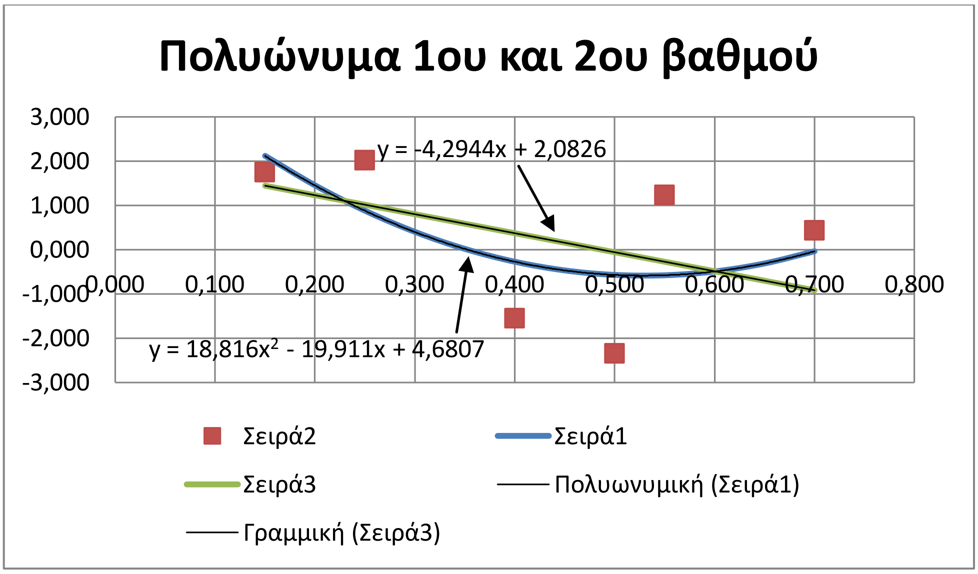
$$\boldsymbol{P_2(x) = 18.81558x^2 - 19.91144x + 4.68067}$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $2^{ου}$ βαθμού που μόλις υπολογίστηκε.




Εικόνα 7 Γραφική παράσταση πολυωνύμου 2ου βαθμού με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Τέλος, στην παρακάτω εικόνα, απεικονίζονται στο ίδιο γράφημα, και τα δύο πολυώνυμα, του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ βαθμού.




Εικόνα 8 Γραφική παράσταση πολυωνύμου $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

## 3.3 Splines

### 3.3.1 Κυβική Spline

Έχουμε το παρακάτω σύστημα.

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Και επίσης οι κόμβοι με τα σημεία:

$$x_0 = 0 \ , \quad x_1 = 0.3 \ , \quad x_2 = 0.6 \ , \quad x_3 = 1$$

$$s_{(0)} = e^{-0^2} = 1\ , \quad s_{(0.3)} = e^{-0.3^2} \cong 0.913931 \ , \quad s_{(0.6)} = e^{-0.6^2} \cong 0.697676 \ ,$$
$$s_{(1)} = e^{1^2} \cong 0.367879$$

i) Οι συνοριακές συνθήκες παρεμβολής στα άκρα της ολοκληρωτέας συνάρτησης στα άκρα σημεία είναι: $s^1(0) = 5$ και $s^1(1) = -7$

Ο αριθμός των κόμβων είναι $n = 4$ και ο βαθμός της Spline είναι 3.

$$3 = 2m - 1$$

$$m = 2$$

$$n + 1 = 4 + 1 = 5 \geq 2 = m$$

*Επομένως επαληθεύεται η συνθήκη* $n + 1 \geq m$ *, και η Spline υπάρχει.*

*Υπάρχουν 2 εσωτερικοί κόμβοι, οπότε το πολυώνυμο θα είναι της μορφής:*

$$s_{(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + C_1 (x - x_1)^3{}_+ + C_2 (x - x_2)^3{}_+$$

$$s_{(0)} = b_0 + 0 + 0 + 0 + C_1 * 0 + C_2 (0 - 0.6)^3{}_+ = 1$$

$$= \quad b_0 - 0.216 C_2 = 1$$

$$s_{(0.3)} = b_0 + 0.3 b_1 + 0.09 b_2 + 0.027 b_3 + C_1 (0.3 - 0.3)^3{}_+ + C_2 (0.3 - 0.6)^3{}_+ = 0.913931$$

$$= \quad b_0 + 0.3 b_1 + 0.09 b_2 + 0.027 b_3 - 0.027 C_2 = 0.913931$$

$$s_{(0.6)} = b_0 + 0.6b_1 + 0.36b_2 + 0.216b_3 + C_1(0.6-0.3)^3{}_+ + C_2(0.6-0.6)^3{}_+ = 0.697676$$

$$= \quad b_0 + 0.6b_1 + 0.36b_2 + 0.216b_3 + 0.027C_1 = 0.697676$$

$$s_{(1)} = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + C_1(1-0.3)^3{}_+ + C_2(1-0.6)^3{}_+ = 0.367879$$

$$= \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + 0.343C_1 + 0.064C_2 = 0.367879$$

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{b_0 - 0.216C_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{b_0 + 0.3b_1 + 0.09b_2 + 0.027b_3 - 0.027C_2 = 0.913931}$$

$$\boldsymbol{b_0 + 0.6b_1 + 0.36b_2 + 0.216b_3 + 0.027C_1 = 0.697676}$$

$$\boldsymbol{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + 0.343C_1 + 0.064C_2 = 0.367879}$$

Στην συνέχεια παραγωγίζοντας τον βασικό τύπο:

$$s^1{}_{(x)} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + C_1(x-x_1)^3{}_+ + C_2(x-x_2)^3{}_+$$

$$= \; b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 3C_1(x-x_1)^2{}_+ + 3C_2(x-x_2)^2{}_+$$

Οπότε, από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών παρεμβολής στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$s^1{}_{(0)} = b_1 + 0 + 0 + 0 + 3C_2(0-0.6)^2{}_+$$

$$= \qquad b_1 + 1.08C_2 = 5$$

$$s^1{}_{(1)} = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 3C_1(1-0.3)^2{}_+ + 3C_2(1-0.6)^2{}_+$$

$$= \quad b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 1.47C_1 + 0.48C_2 = -7$$

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{b_1 + 1.08C_2 = 5}$$

$$\boldsymbol{b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 1.47C_1 + 0.48C_2 = -7}$$

Έτσι λοιπόν έχουμε 6 αγνώστους και 6 εξισώσεις. Άρα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα εύκολα, χρησιμοποιώντας μάλιστα κάποιο από τα προγράμματα του Jacobi ή Gauss-Seidel που έχω δημιουργήσει στην προηγούμενη εργασία.

Έχοντας τα παραπάνω, δημιουργείτε ο παρακάτω πίνακας συντελεστών των αγνώστων:

```
ans =

    1.0000         0         0         0         0   -0.2160
    1.0000    0.3000    0.0900    0.0270         0   -0.0270
    1.0000    0.6000    0.3600    0.2160    0.0270         0
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    0.3430    0.0640
         0    1.0000         0         0         0    1.0800
         0    1.0000    2.0000    3.0000    1.4700    0.4800
```

Και ο πίνακας των αποτελεσμάτων:

```
ans =

    1.0000
    0.9139
    0.6977
    0.3679
    5.0000
   -7.0000
```

Στους παραπάνω πίνακες, έγινε μια μικρή αλλαγή στην σειρά που εμφανίζονται τα αποτελέσματα, δηλαδή το $s^1{}_{(0)}$ άλλαξε σειρά με το $s^1{}_{(1)}$ , και αυτό διότι στην διαγώνιο του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, υπάρχει ένα μηδενικό, και αυτό δημιουργούσε πρόβλημα στην επίλυση του πίνακα με την βοήθεια των προγραμμάτων του Jacobi ή Gauss-Seidel. Έτσι λοιπόν, μετά την αλλαγή στην σειρά, οι πίνακες πήραν την τελική τους μορφή, η οποία και φαίνεται παρακάτω:

```
    1.0000         0         0         0         0   -0.2160
    1.0000    0.3000    0.0900    0.0270         0   -0.0270
    1.0000    0.6000    0.3600    0.2160    0.0270         0
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    0.3430    0.0640
         0    1.0000    2.0000    3.0000    1.4700    0.4800
         0    1.0000         0         0         0    1.0800
```

```
ans =

    1.0000
    0.9139
    0.6977
    0.3679
   -7.0000
    5.0000
```

Έχοντας λοιπόν τους παραπάνω πίνακες, εισήγαγα όλα τα δεδομένα στο πρόγραμμα υπολογισμού γραμμικών συστημάτων του Gauss-Seidel, και πήρα τα παρακάτω αποτελέσματα:

```
Command Window
>> format short
Matrix A=[1 0 0 0 0 -0.216;1 0.3 0.09 0.027 0 -0.027;1 0.6 0.36 0.216 0.027 0;1 1 1 1 0.343 0.064;0 1 2 3

A =

    1.0000         0         0         0         0   -0.2160
    1.0000    0.3000    0.0900    0.0270         0   -0.0270
    1.0000    0.6000    0.3600    0.2160    0.0270         0
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    0.3430    0.0640
         0    1.0000    2.0000    3.0000    1.4700    0.4800
         0    1.0000         0         0         0    1.0800

Matrix B=[1;0.913931;0.697676;0.367879;-7;5]

B =

    1.0000
    0.9139
    0.6977
    0.3679
   -7.0000
    5.0000


x =

   5.287759759062837
 -15.710965278611177
  -1.973469708331720
  35.383682622174803
 -70.082651830877168
  19.176819702417752
```

Απ' ότι φαίνεται και στο Command Window του Matlab, οι άγνωστοι που είχαμε παραπάνω, φαίνονται με τις λύσεις τους στον παρακάτω πίνακα:

| | |
|---|---|
| $b_0$ | 5.2877598 |
| $b_1$ | -1.5710965 |
| $b_2$ | -1.9734697 |
| $b_3$ | 35.3836826 |
| $C_1$ | -70.082652 |
| $C_2$ | 19.1768197 |

Έτσι λοιπόν κάνοντας αντικατάσταση τα παραπάνω νούμερα στον αρχικό τύπο του πολυωνύμου, το πολυώνυμο παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$s_{(x)} = 52.8776 - 15.71097x - 1.97347x^2 + 35.3837x^3 - 70.0827(x-0.3)^3{}_+ + 19.17682(x-0.6)^3{}_+$$

Οι παρενθέσεις αναλύονται:

$$-70.0827(x-0.3)^3{}_+ = -70.0827(x^3 - 0.9x^2 + 0.27x - 0.027) =$$

$$-70.0827x^3 + 63.07443x^2 - 18.9223x + 1.8922$$

$$19.17682(x-0.6)^3{}_+ = 19.17682(x^3 - 1.8x^2 + 1.08x - 0.216\,) =$$

$$19.17682x^3 - 34.5183x^2 + 20.71097x - 4.14219$$

Έτσι λοιπόν, το πολυώνυμο παίρνει την παρακάτω τελική του μορφή:

$$s_{(x)} = 5.28776 - 15.71097x - 1.97347x^2 + 35.3837x^3 - 70.0827x^3 + 63.07443x^2 - 18.9223x + 1.8922 + 19.17682x^3 - 34.5183x^2 + 20.71097x - 4.14219 \; =$$

$$\boldsymbol{s_{(x)} = -15.5222x^3 + 26.58266x^2 - 13.9223x + 3.03777}$$

Έχοντας υπολογίσει τελικά το τελικό πολυώνυμο, μπορώ να υπολογίσω το αρχικό ολοκλήρωμα της εκφώνησης:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \; =>$$

$$I = \int_0^1 \boldsymbol{s_{(x)}} dx \; =>$$

$$I = \int_0^1 (-15.5222x^3 + 26.58266x^2 - 13.9223x + 3.03777)dx \; =$$

$$\left[-15.5222\frac{x^4}{4} + 26.58266\frac{x^3}{3} - 13.9223\frac{x^2}{2} + 3.03777x\right]_0^1 \; =$$

$$-3.88055 + 8.860887 - 6.96115 + 3.03777 + 1.056962 =>$$

$$I = 1.056962$$

Η θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος, όπως έχω αναφέρει παραπάνω είναι:

$$I \approx 0.746824$$

Το σφάλμα είναι:

$$\boldsymbol{e = |1.056962 - 0.746824| = 0.310138}$$

Το σφάλμα είναι πολύ μεγάλο. Έκανα αρκετές επαληθεύσεις, άρα, το μόνο που μου μένει να υποθέσω είναι πως το σφάλμα αυτό οφείλεται στον μεγάλο όγκο των αριθμητικών πράξεων, και της συσσωρεύσεις των πολλών μικρών σφαλμάτων, σε ένα αρκετά μεγάλο.

### 3.3.2 Φυσική κυβική Spline

Η Spline σε αυτή την περίπτωση είναι μια φυσική Spline, με κόμβους όπως η παραπάνω άσκηση. Δηλαδή:

$$x_0 = 0 \ , \quad x_1 = 0.3 \ , \quad x_2 = 0.6 \ , \quad x_3 = 1$$

$$s_{(0)} = e^{-0^2} = 1 \, , \quad s_{(0.3)} = e^{-0.3^2} \cong 0.913931 \ , \quad s_{(0.6)} = e^{-0.6^2} \cong 0.697676 \ ,$$
$$s_{(1)} = e^{1^2} \cong 0.367879$$

Από την θεωρία των Splines, το πολυώνυμο θα έχει την μορφή:

$$s(x) = a_0 + a_1 x + c_0(x - x_0)_+^3 + c_1(x - x_1)_+^3 + c_2(x - x_2)_+^3 + c_3(x - x_3)_+^3$$

Από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$s(0) = a_0 + a_1 0 + \overbrace{c_0(x-0)_+^3 + c_1(x-0.3)_+^3 + c_2(x-0.6)_+^3 + c_3(x-1)_+^3}^{0} =$$

$$= a_0 = 1$$

$$s(0.3) = a_0 + a_1 0.3 + c_0(0.3-0)_+^3 + \overbrace{c_1(x-0.3)_+^3 + c_2(x-0.6)_+^3 + c_3(x-1)_+^3}^{0} =$$

$$= a_0 + 0.3a_1 + 0.027c_0 = 0.913931$$

$$s(0.6) = a_0 + a_1 0.6 + c_0(0.6-0)_+^3 + c_1(0.6-0.3)_+^3 + \overbrace{c_2(x-x_2)_+^3 + c_3(x-1)_+^3}^{0} =$$

$$= a_0 + 0.6a_1 + 0.216c_0 + 0.027c_1 = 0.697676$$

$$s(1) = a_0 + a_1 + c_0(1-0)_+^3 + c_1(1-0.3)_+^3 + c_2(1-0.6)_+^3 + \overbrace{c_3(x-1)_+^3}^{0} =$$

$$= a_0 + a_1 + c_0 + 0.343c_1 + 0.064c_2 = 0.367879$$

Άρα, συγκεντρωτικά:

$$\boldsymbol{a_0 = 1}$$

$$\boldsymbol{a_0 + 0.3a_1 + 0.027c_0 = 0.913931}$$

$$\boldsymbol{a_0 + 0.6a_1 + 0.216c_0 + 0.027c_1 = 0.697676}$$

$$\boldsymbol{a_0 + a_1 + c_0 + 0.343c_1 + 0.064c_2 = 0.367879}$$

Επίσης, εκτός από τα παραπάνω, ισχύει:

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

Και

$$C_0x_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = 0$$

Άρα

$$\boldsymbol{C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{0.3C_1 + 0.6\,C_2 + 1C_3 = 0}$$

Έχουμε 6 αγνώστους και 6 εξισώσεις. Και εδώ σε αυτή την περίπτωση, όπως και στην παραπάνω άσκηση, χρησιμοποίησα το πρόγραμμα του Gauss-Seidel για επίλυση γραμμικών συστημάτων και εμφανίστηκαν τα παρακάτω:

Ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων:

```
A =

    1.0000         0         0         0         0         0
    1.0000    0.3000    0.0270         0         0         0
    1.0000    0.6000    0.2160    0.0270         0         0
    1.0000    1.0000    1.0000    0.3430    0.0640         0
         0         0    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
         0         0         0    0.3000    0.6000    1.0000
```

Ο πίνακας των αποτελεσμάτων:

```
B =

    1.0000
    0.9139
    0.6977
    0.3679
         0
         0
```

Και τέλος ο πίνακας των πρώην αγνώστων:

```
x =

   1.000000000000000
  -0.178175381193335
  -1.208115029901761
   2.427615601496401
  -1.227307370309083
   0.008099741736529
```

Ολόκληρη η εικόνα του Command Window μετά το τρέξιμο του προγράμματος φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

```
Command Window
>> format short
Εισήγαγε τον πίνακα A=[1 0 0 0 0 0;1 0.3 0.027 0 0 0;1 0.6 0.216 0.027 0 0;1 1 1 0.343 0.064 0;0 0 1 1 1

A =

    1.0000         0         0         0         0         0
    1.0000    0.3000    0.0270         0         0         0
    1.0000    0.6000    0.2160    0.0270         0         0
    1.0000    1.0000    1.0000    0.3430    0.0640         0
         0         0    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
         0         0         0    0.3000    0.6000    1.0000

Εισήγαγε τον πίνακα B=[1;0.913931;0.697676;0.367879;0;0]

B =

    1.0000
    0.9139
    0.6977
    0.3679
         0
         0

Βάλε αριθμό αγνώστων=6

x =

   1.000000000000000
  -0.178175381193335
  -1.208115029901761
   2.427615601496401
  -1.227307370309083
fx 0.008099741736529
```

Τα αποτελέσματα των αγνώστων παρατίθενται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα:

| | |
|---|---|
| $\alpha_0$ | 1.00000000 |
| $\alpha_1$ | -0.17817538 |
| $C_0$ | -1.20811503 |
| $C_1$ | 2.42761560 |
| $C_2$ | -1.22730737 |
| $C_3$ | 0.00809974 |

Έτσι λοιπόν, με αντικατάσταση των αγνώστων με τα υπολογισθέντα νούμερα, το πολυώνυμο παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$s(x) = 1 - 0.17817538x - 1.20811503(x-0)_+^3 + 2.42761560(x-0.3)_+^3 - 1.22730737(x-0.6)_+^3 + 0.00809974(x-1)_+^3 \quad =$$

$$= 1 - 0.17817538x - 1.20811503x^3 + 2.42761560(x^3 - 0.9x^2 + 0.27x - 0.027) - 1.22730737(x^3 - 1.8x^2 + 1.08x - 0.216\ ) + 0.00809974(\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 1) =$$

$$1 - 0.17817538x - 1.20811503x^3 + 2.42761560x^3 - 2.18485x^2 + 0.655456x - 0.06555 - 1.22731x^3 + 2.209153x^2 - 1.32549x + 0.265098 + 0.00809974x^3 - 0.0243x^2 + 0.02499x - 0.00809974 \;=>$$

$$s(x) = 0.0002929x^3 + 6 * 10^{-9}x^2 - 0.82391x + 1.1914530$$

$$\boldsymbol{s(x) = 0.0002929x^3 - 0.82391x + 1.1914530}$$

Έχοντας υπολογίσει τελικά το τελικό πολυώνυμο, μπορώ να υπολογίσω και σε αυτή την περίπτωση το αρχικό ολοκλήρωμα της εκφώνησης:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx \;=>$$

$$I = \int_0^1 \boldsymbol{s_{(x)}}dx \;=>$$

$$I = \int_0^1 (0.0002929x^3 - 0.82391x + 1.1914530)dx \;=$$

$$\left[0.0002929\frac{x^4}{4} - 0.82391\frac{x^2}{2} + 1.1914530x\right]_0^1 \;=$$

$$0.000073 - 0.41196 + 1.1914530 =>$$

$$\boldsymbol{I = 0.779570}$$

Η θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος, όπως έχω αναφέρει παραπάνω είναι:

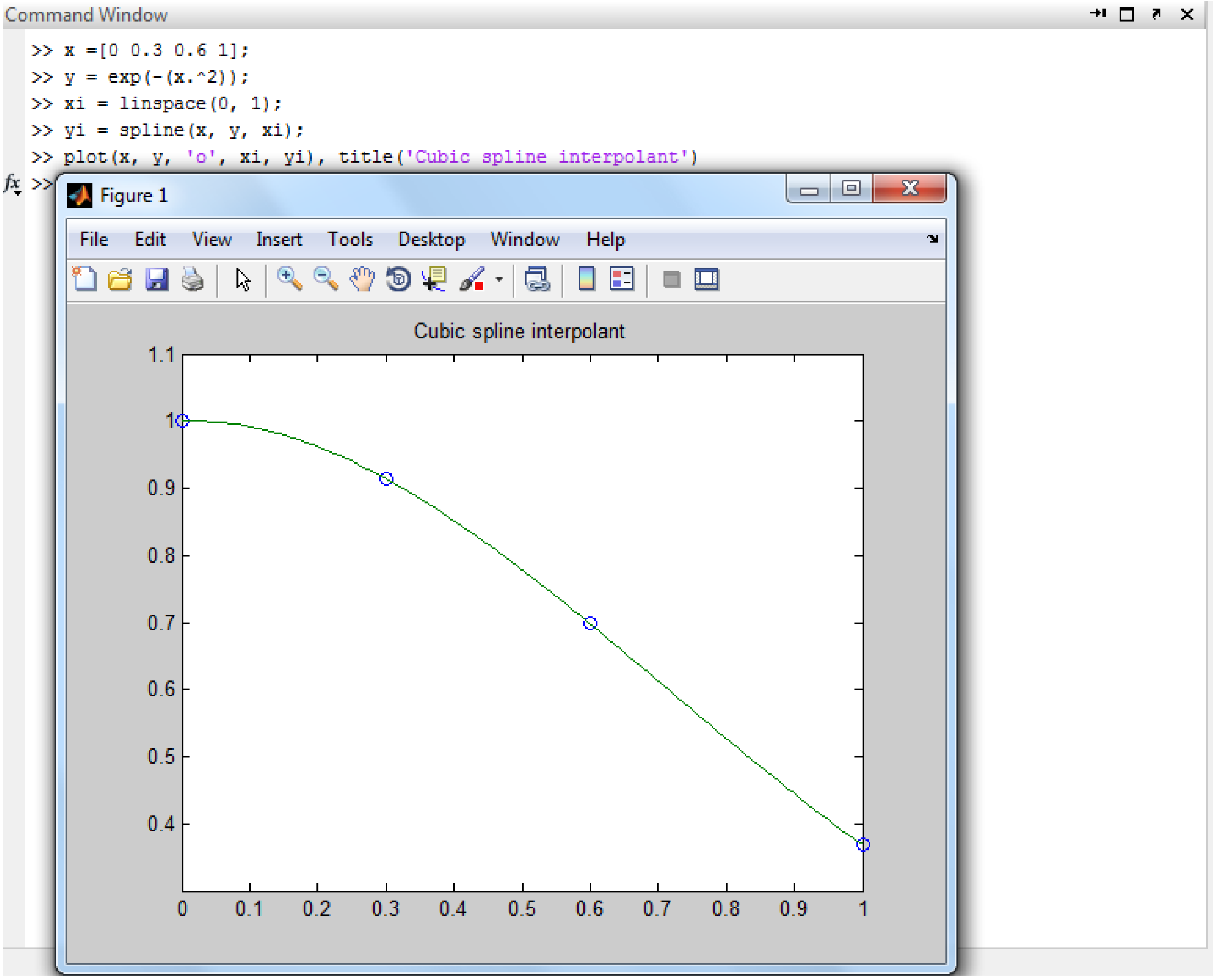
$$I \approx 0.746824$$

Το σφάλμα είναι:

$$\boldsymbol{e = |0.779570 - 0.746824| = 0.032746}$$

Τώρα εδώ σε αυτή την περίπτωση, το σφάλμα είναι μικρότερο από την παραπάνω άσκηση και αυτό οφείλεται πιθανών στις λιγότερες πράξεις που έγιναν.

Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται η Spline με τα σημεία της εκφώνησης, σχεδιασμένη στο Matlab.



## 3.4 Συγκριτικά-συγκεντρωτικά αποτελέσματα

### *3.1 Πολυωνυμική παρεμβολή*

**Πολυώνυμο με την μέθοδο του Lagrange:**

$$P_3(x) = 0.57519x^3 - 1.24093x^2 + 0.03362x + 1$$

**Lagrange με Matlab:**

$$P_n(x) = 0.575126x^3 - 1.2408365x^2 + 0.03358952x + 1$$

**Σφάλμα θεωρητικής και υπολογιστικής τιμής(Lagrange):**

$$e = |0.746963 - 0.746824| = 0.000139$$

**Πολυώνυμο με την μέθοδο του Newton:**

$$P_3(x) = 0.57517x^3 - 1.24091x^2 + 0.03361x + 1$$

**Newton με Matlab:**

$$P_n(x) = 0.57519x^3 - 1.240931x^2 + 0.0336122x + 1$$

**Σφάλμα θεωρητικής και υπολογιστικής τιμής(Newton):**

$$e = |0.746960 - 0.746824| = 0.0001362$$

### *3.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων:*

**Πολυώνυμο 1$^{ου}$ βαθμού:**

$$P(x_i) = -4.29437x_i + 2.08261$$

**Πολυώνυμου 2$^{ου}$ βαθμού:**

$$P_2(x) = 18.81558x^2 - 19.91144x + 4.68067$$

## 3.3 Splines

**Κυβική Spline**

$$s_{(x)} = -15.5222x^3 + 26.58266x^2 - 13.9223x + 3.03777$$

**Σφάλμα θεωρητικής και υπολογιστικής τιμής(κυβικής)**

$$e = |1.056962 - 0.746824| = 0.310138$$

**Φυσική κυβική Spline**

$$s(x) = 0.0002929x^3 - 0.82391x + 1.1914530$$

**Σφάλμα θεωρητικής και υπολογιστικής τιμής(φυσική κυβική)**

$$e = |0.779570 - 0.746824| = 0.032746$$