

Εργασία 3

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

3.1 Πολυωνυμική παρεμβολή

Ασκήσεις 3.1 - 1

1. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad \text{με θεωρητική τιμή:} \quad I \approx 0.9270373. \quad (3.1 - 1)$$

i) Να γίνει προσέγγιση της ολοκληρωτέας συνάρτησης με το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange (χωρίς τον τελικό υπολογισμό μόνο την εφαρμογή του τύπου), αντίστοιχα του Newton, όταν οι κόμβοι είναι στα σημεία:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.3, \quad x_2 = 0.6, \quad \text{και} \quad x_3 = 1.0. \quad (3.1 - 2)$$

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (3.1-1) χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή.

2. Έστω ότι τα σημεία x_0, x_1, x_2 και x_3 ισοαπέχουν, δηλαδή $h = x_{i+1} - x_i$ για κάθε $i = 0, 1, 2, 3$. Δείξτε ότι

$$2! f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2},$$

$$3! f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{h^3} [-f(x_0) + 3f(x_1) - 3f(x_2) + f(x_3)].$$

3.2 Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων

Άσκηση 3.2.1

Έστω τα δεδομένα:

x_i	0.3	0.5	0.7	1.4	1.8	2.2	3.5
y_i	0.0647	0.0985	0.2490	1.0395	1.5393	3.5941	4.0549

Με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων να υπολογιστούν

- i) το πολυώνυμο 1ου, αντίστοιχα 2ου βαθμού (προαιρετική η λύση του συστήματος) που τα προσεγγίζει. Στο πολυώνυμο 1ου βαθμού να υπολογιστεί το σφάλμα της προσέγγισης.
- ii) Να γίνει η γραφική παράσταση του πολυωνύμου 1ου βαθμού της περίπτωσης (i) και των σημείων (x_i, y_i) .

3.3 Splines

Άσκηση 3.3.1

Να γραφεί η μορφή του συστήματος υπολογισμού της κυβικής spline της Άσκησης 3.1 – 1 (1) με κόμβους τα σημεία (3.1 – 2), όταν

- i) οι συνοριακές συνθήκες παρεμβολής (5.1.3–8) του Μαθήματος 5 συμπίπτουν με τις τιμές της παραγώγου της ολοκληρωτέας συνάρτησης στα άκρα σημεία,
- ii) η spline είναι φυσική.

Σημειώσεις 3.3 - 1

- Σε όλους τους υπολογισμούς να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία.

- Οι εργασίες, ακόμα και όταν είναι χειρόγραφες, πρέπει να είναι καθαρογραμμένες.