ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ

Μάθημα: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Διδάσκων: Δρ. Μπράτσος Αθανάσιος

Ακαδημαϊκό έτος: 2013 – 2014

Τίτλος Εργαστηριακής Άσκησης: Προσέγγιση Παραγώγων

Ονοματεπώνυμο Σπουδαστή: Εμμανουήλ Δ. Μωράκης

Αριθμός Μητρώου / Εξάμηνο: 05145 / ΠΤΥΧΙΟ

Ημερομηνία παράδοσης: 09/01/2014

Άσκηση 1η

Ερώτημα i

Η συνάρτησή μας είναι η παρακάτω:

$$f(x) = \tan^{-1}(e^{-x})$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(x) = -\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$$

και

$$f''(x) = \frac{e^{x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

Για x = 0 έχουμε:

$$f'(0) = -\frac{e^{0}}{e^{0}+1} = -0{,}5$$

και

$$f''(x) = \frac{e^{0}(e^{0}-1)}{(e^{0}+1)^2} = 0$$

Για να γίνει υπολογισμός μέσω των προσεγγιστικών μεθόδων εύρεσης παραγώγων στο σημείο ξ = 0 με h = 0.1 και h = 0.001 θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους:

$$f'(\xi) \approx \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

$$f''(\xi) = \frac{f(\xi-h)-2f(\xi)+f(\xi+h)}{h^2}$$

Θέτοντας ως $h_1 = 0.1$ και $h_2 = 0.001$ έχουμε:

$$f(\xi) = \tan^{-1}(e^{-\xi}) = f(0) = \tan^{-1}(e^{-0}) = 0.785398$$

$$f(\xi + h_1) = \tan^{-1}[e^{-(\xi+h_1)}] = f(-0.1) = \tan^{-1}(e^{-0.1}) = 0.735481$$

$$f(\xi + h_2) = \tan^{-1}[e^{-(\xi+h_2)}] = f(-0.001) = \tan^{-1}(e^{-0.001}) = 0.784898$$

$$f(\xi - h_1) = \tan^{-1}[e^{-(\xi-h_1)}] = f(0.1) = \tan^{-1}(e^{0.1}) = 0.835315$$

$$f(\xi - h_2) = \tan^{-1}[e^{-(\xi-h_2)}] = f(0.001) = \tan^{-1}(e^{0.001}) = 0.785898$$

Άρα για $h = 0.1$:

$$f'(\xi) = -0.499169$$

$$f''(\xi) = 0$$

Για $h = 0.001$:

$$f'(\xi) = -0.5$$

$$f''(\xi) = 0$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε με $h = 0.1$ για την πρώτη παράγωγο έχει πολύ μικρή απόκλιση από την θεωρητική τιμή.

Διαπιστώνουμε ότι για όλα τα άλλα αποτελέσματα η διαδικασία προσέγγισης αποδεικνύεται ακριβής (πρώτη παράγωγος με $h = 0.001$ και δεύτερη παράγωγος με $h = 0.1$ και $h = 0.001$).

Άσκηση $1^η$

Ερώτημα ii

Μέσω κώδικα και χρησιμοποιώντας τον τύπο τού Taylor για να προσεγγίσουμε την παράγωγο $f^{(4)}(\xi)$ έχουμε:

In[1]:= y[t, h_] :=y + hy’ + h^2y’’ / 2 + h^3y^((2))/6 + h^4y^4/24

In[2]:= y[t, -2h]

Out[2]= y $-\frac{4h^3y^2}{3}+\frac{2h^4y^4}{3}$ - 2hy’ + $2h^2$y’’

In[3]:= y[t, –h]

Out[3]= y $-\frac{h^3y^2}{6}+\frac{h^4y^4}{24}$ - hy’ + $\frac{h^2y''}{2}$

In[4]:= y[t, h]

Out[4]= y + $\frac{h^3y^2}{6}+\frac{h^4y^4}{24}$ + hy’ + $\frac{h^2y''}{2}$

In[5]:= In[4]:= y[t, 2h]

Out[5]= y + $\frac{4h^3y^2}{6}+\frac{2h^4y^4}{24}$ + 2hy’ + $2h^2$y’’

In[6]:= Simplify[y[t, -2h] – 4y[t, -h] + 6y - 4y[t, h] + y[t, 2h]]

Out[6]= h^4y^4

Then

y^(4) = ([y[t, -2h] – 4y[t, -h] + 6y – 4y[t, h] + y[t, 2h]])/ h^4

Άσκηση $3^η$

Ερώτημα i

Η συνάρτηση μας είναι η παρακάτω:

$$u(x,t) = 4\tan^{-1}\{\exp[-(x - t)]\}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$u_{xt} = 4\,\frac{e^{t+x}\,(-e^{2x} + e^{2t})}{(e^{2x} + e^{2x})^2}$$

Οπότε για x = 0 και t = 1 έχουμε:

$$u_{xt}|_{x=0,t=1} = 0.987109$$

Τροποποιώντας τον τύπο: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{1}{4*h*l}$ [u(x + h,t + l) – u(x + h,t – l) – u(x – h,t + l) + u(x – h,t – l)], και με x = 0, t = 1 και h = l = 0.01 έχουμε:

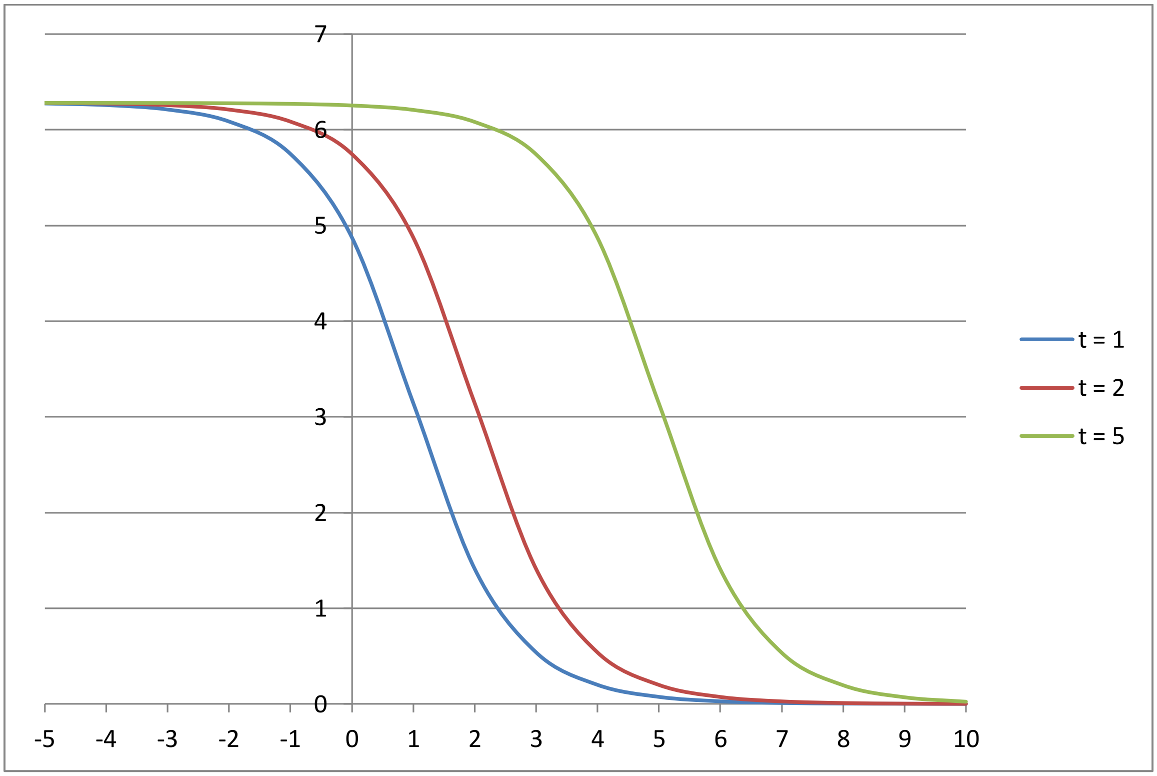
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{1}{4*0.01*0.01}\,[u(0.01,-0.99) - u(0.01,-1.01) - u(-0.01,-0.99) + u(-0.01,-1.01)] \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0.987059$$

Άρα το σφάλμα που λαμβάνουμε είναι:

$$|e| = 0.00005$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(x,t) = 4\tan^{-1}\{\exp[-(x - t)]\}$ όταν $x \in [-5,10]$ και t = 1,2,5 φαίνεται στην επόμενη σελίδα:



Όπως διαπιστώνουμε όσο μεγαλώνει το t οι καμπύλες μας “κινούνται” θετικά ως προς τους άξονες x’x και y’y. Επίσης παρατηρούμε ότι είναι παράλληλες στο διάστημα που εξετάζουμε.

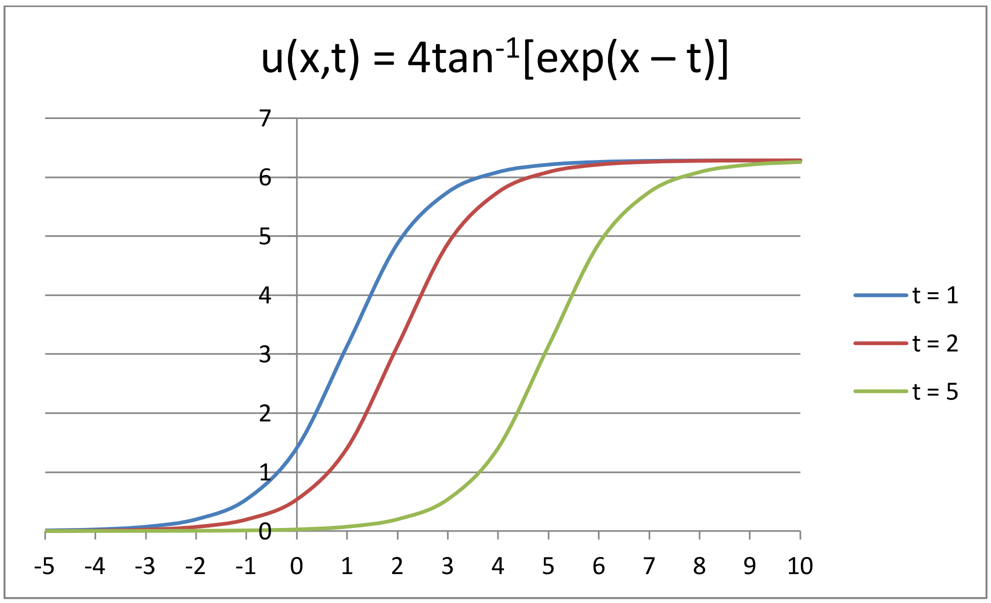
Οι συναρτήσεις μας, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι οι:

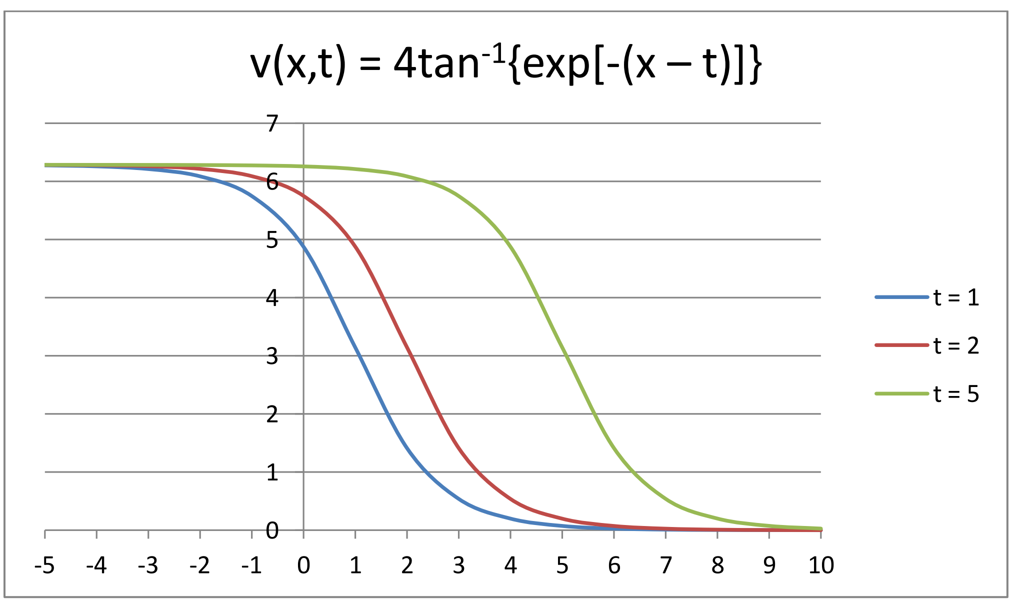
$$u(x,t) = 4\tan^{-1}[\exp(x - t)]$$

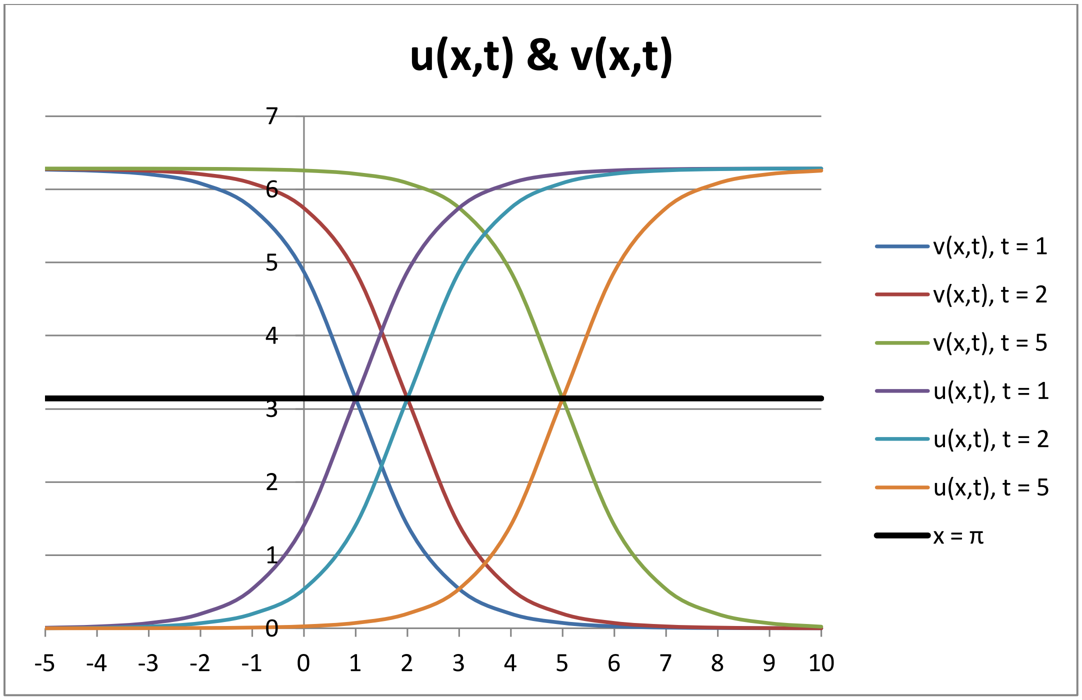
και

$$v(x,t) = 4\tan^{-1}\{\exp[-(x - t)]\}$$

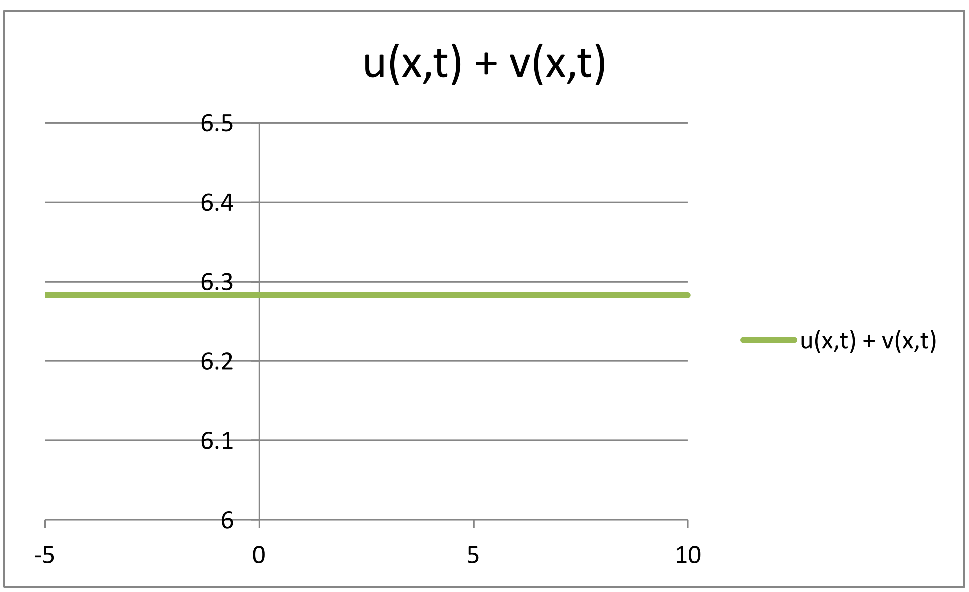
Οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται παρακάτω:







Όπως διαπιστώνουμε οι συναρτήσεις μας είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία x = π για οποιοδήποτε t, άρα αναμένουμε ότι από την στιγμή που βρισκόμαστε στον θετικό ημιάξονα y'y όταν προσθέσουμε τις δύο συναρτήσεις θα έχουμε μια ευθεία η οποία θα είναι η x = 2π.



Όπως φαίνεται παραπάνω, η πρόσθεση των δύο συναρτήσεων φέρνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα.