

Εργασία 4

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Άσκηση 1η

- i) Να υπολογιστεί με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων η 1ης και η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \tan^{-1}(e^{-x})$$

στο σημείο $\xi = 0$, όταν $h = 0.1, 0.001$ και να γίνει σύγχριση με τη θεωρητική τιμή. Τι παρατηρείτε;

- ii) (προαιρετική) Με τον τύπο του Taylor να υπολογιστεί μια προσέγγιση της παραγώγου $f^{(4)}(\xi)$.

Άσκηση 2η

Η γραμμική μορφή της εξίσωσης **διάχυσης-μεταφοράς** (diffusion-convection) σε μία διάσταση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{όπου } 0 < x < b \text{ και } t > 0 \quad (4 - 1)$$

όπου $\mu > 0$ είναι η **παράμετρος μεταφοράς** (convection parameter).

Οι συνοριακές συνθήκες, όταν $t > 0$, είναι

$$u(0, t) = v(t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0.$$

Με υπολογισμούς ανάλογους του Παραδείγματος 6.2.1–1 του Μαθήματος 6 δείξτε ότι η διανυσματική μορφή της λύσης της εξίσωσης (4–1) είναι

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A \mathbf{U}(t) + \mathbf{b}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 - \frac{1}{2}\mu h & & \\ 1 + \frac{1}{2}\mu h & -2 & 1 - \frac{1}{2}\mu h & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 + \frac{1}{2}\mu h & -2 & 1 - \frac{1}{2}\mu h \\ & & & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } \mathbf{b} = h^{-2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\mu h \right) U_t(n\ell), 0, \dots, 0 \right]^T.$$

Άσκηση 3η

1. Όμοια με τη συνάρτηση $u(x, t)$ του Παραδείγματος 6.2.2–1 του Μαθήματος 6 η συνάρτηση

$$v(x, t) = 4 \tan^{-1} \{ \exp[-(x - t)] \}$$

περιγράφει ένα κύμα soliton. Εφαρμόζοντας τον τύπο (6.2.2–2) για $h = \ell = 0.01$, όταν $x = 0, t = 1$ να υπολογιστεί η $u_{xt}|_{x=0, t=1}$ και να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη θεωρητική.

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(x, t) + v(x, t)$, όταν $x \in [-5, 10]$ και $t = 1, 2, 5$. Τι παρατηρείτε;