2014

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

V. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΠΑΠΑΘΕΟΦΑΝΟΥΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ 11038

Περιεχόμενα

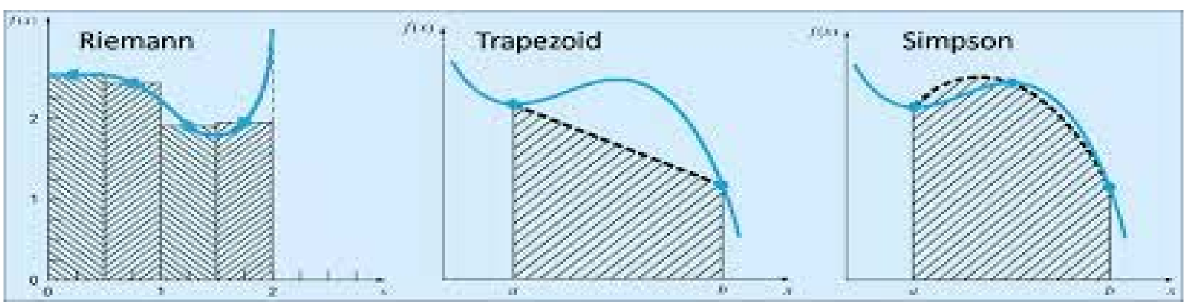
Εισαγωγή

Η προσέγγιση ολοκληρωμάτων είναι μια τεχνική, η οποία στα μαθηματικά και γενικότερα στις υπόλοιπες θετικές επιστήμες χρησιμοποιείται συνήθως όταν λόγω μιας πολύπλοκης μορφής ενός τύπου μιας συνάρτησης είναι αδύνατος ο θεωρητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος, είτε όταν δεν είναι γνωστός ο τύπος της συνάρτησης, αλλά μόνον οι τιμές της σε ορισμένα σημεία.

Οι προσεγγίσεις που θα εξεταστούν παρακάτω βασίζονται στον τύπο παρεμβολής του Νεύτωνα. Σύμφωνα με τον αριθμό και τον τρόπο που συνδυάζονται τα σημεία παρεμβολής προκύπτουν οι μέθοδοι υπολογισμού ή όπως συνήθως λέγονται οι κανόνες ολοκλήρωσης.

Συνήθεις τρόποι ολοκλήρωσης (απλού τρόπου) είναι ο κανόνας του ορθογωνίου, ο κανόνας του τραπεζίου, ο κανόνας του Thomas Simpson και ο κανόνας των $^3/_8$ του ίδιου επιστήμονα.

Κατά την παρακάτω επίλυση των ασκήσεων που ζητούνται, θα λυθούν ολοκληρώματα και με σύνθετο τρόπο, τα οποία θα εξηγηθούν κατά την επίλυση της άσκησης.



Πίνακας 1 Γραφικές παραστάσεις μεθόδων ολοκλήρωσης

Πρώτη Άσκηση

Δίνεται:

$$I = \int_{0}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Να λυθεί το παραπάνω ολοκλήρωμα με τον κανόνα του Gauss-Seidel για 6 σημεία και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή:

$$I = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}\,\begin{matrix}0.6\\0\end{matrix} \approx 0.02914926$$

Και την αντίστοιχη λύση των 6 σημείων που προκύπτει από τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, Simpson και $^3/_8$ του Simpson, όταν h=0,1.

Η επίλυση ξεκινά αρχικά με τον μετασχηματισμό του διαστήματος ολοκλήρωσης στο διάστημα [-1,1], θέτοντας:

$$x = \frac{(0.6-0)t}{2} + \frac{0.6+0}{2} = 0.3t \pm 0.3$$

$$dx = d(0.3t+0.3) = (0.3t+0.3)'dt = 0.3dt$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί και σε αυτή την ισοδύναμη μορφή:

$$I = \int_{0}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{0.3(0.3x+0.3)^3 dx}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^2}} = I = \int_{-1}^{1} g(x)dx$$

Όταν όμοια έχει τεθεί για ευκολία x αντί για t και g(x)=$\frac{0.3(0.3x+0.3)^3}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^2}}$.

Στη συνέχεια, υπολογίζεται για κάθε ένα διάστημα το γινόμενο wg(x). Για παράδειγμα το πρώτο x θα ισούται:

$$w_1 g(x_1) = 0{,}17132449 \frac{0.3(0.3(-0{,}9324695)+0.3)^3}{\sqrt{1+(0.3(-0{,}9324695)+0.3)^2}} = 4{,}27283E-07$$

Ακολουθεί ο πίνακας όπου υπολογίστηκαν τα βήματα, όμοια με το παραπάνω πρώτο παράδειγμα:

	Gauss		
n	xi	wi	wig(xi)
1	-0,9324695	0,17132449	4,27283E-07
2	-0,66120939	0,36076157	0,000113049
3	-0,23861919	0,46791396	0,001630847
4	0,23861919	0,46791396	0,006751166
5	0,66120939	0,36076157	0,011989679
6	0,9324695	0,17132449	0,008664091
		sum ->	0,02914926

Πίνακας 2 Υπολογισμός με την προσέγγιση του κανόνα Gauss-Seidel

Αφού βρεθούν τα ξεχωριστά για κάθε ρίζα και w γινόμενα, τότε αθροίζονται για να προσεγγίσουν την λύση του ολοκληρώματος. Δηλαδή:

$$\sum w_i g(x_i) = w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) + w_4 g(x_4) + w_5 g(x_5) + w_6 g(x_6) \approx 0{,}02914926.$$

Στο σημείο αυτό, αναφέρεται πως η σχετική απόκλιση από την πειραματική ως προς την θεωρητική τιμή ισούται με 0%. Η παραπάνω διαδικασία λοιπόν είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος για την εύρεση μιας τιμής προσεγγιστικά.

Ως δεύτερο υποερώτημα ζητείται η εύρεση λύσης στο ίδιο ολοκλήρωμα, παρόλα αυτά με διαφορετική μέθοδο από την παραπάνω.

Η επόμενη μέθοδος επίλυσης του ολοκληρώματος είναι με τον κανόνα του τραπεζίου. Ο κανόνας αυτός βασίζεται στην σχέση (στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε 6 ρίζες, γι' αυτό και έχουμε 6 συναρτήσεις):

$$I(x) = \frac{h}{2} f(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + hf(x_4) + hf(x_5) + \frac{h}{2} f(x_6)$$

Όπου το βήμα h=0,1.

Σύμφωνα με τον κανόνα του τραπεζίου, η λύση ακολουθεί παρακάτω με τον εξής πίνακα:

	Κανόνας Τραπεζίου		
n	x	f(x)	
1	0	0	0
2	0,1	0,000995037	9,95037E-05
3	0,2	0,007844645	0,000784465
4	0,3	0,02586131	0,002586131
5	0,4	0,059422508	0,005942251
6	0,5	0,111803399	0,01118034
7	0,6	0,185218472	0,009260924
		sum ->	0,029853614

Πίνακας 3 Προσεγγιστική επίλυση με τον κανόνα του τραπεζίου

Η απόκλιση από την μέθοδο αυτή και την θεωρητική τιμή που δίνεται ως ζητούμενη, ισούται με 2,4%.

Συνέχεια έχει η μέθοδος με τον κανόνα του Simpson. Ο κανόνας αυτός βασίζεται στην εξής σχέση (τροποποιημένη για την συγκεκριμένη περίπτωση, όπου εμπεριέχονται 6 συναρτήσεις):

$$I(x) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right)$$

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

	Κανόνας Simpson		
n	x	f(x)	
1	0	0	0
2	0,1	0,000995037	0,003980149
3	0,2	0,007844645	0,015689291
4	0,3	0,02586131	0,103445239
5	0,4	0,059422508	0,118845016
6	0,5	0,111803399	0,447213595
7	0,6	0,185218472	0,185218472
		sum ->	0,029146392

Πίνακας 4 Προσέγγιση με τον κανόνα του Simpson

Η απόκλιση από την συγκεκριμένη μέθοδο ως προς την θεωρητική ισούται με 0,0098%.

Τελευταία μέθοδος είναι αυτή του κανόνα του Simpson με την παραλλαγή του, ονομαζόμενη και ως κανόνας των 3/8. Η σχέση αυτή είναι η εξής:

$$I(x) = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6))$$

Ως αποτελέσματα, δίνονται τα παρακάτω:

	Κανόνας Simpson 3/8		
n	x	f(x)	
1	0	0	0
2	0,1	0,000995037	0,002985112
3	0,2	0,007844645	0,023533936
4	0,3	0,02586131	0,051722619
5	0,4	0,059422508	0,178267525
6	0,5	0,111803399	0,335410197
7	0,6	0,185218472	0,185218472
		sum ->	0,02914267

Πίνακας 5 Προσέγγιση με τον κανόνα των 3/8

Η υπολογισμένη απόκλιση με την θεωρητική τιμή ισούται με 0,02%.

Δεύτερη Άσκηση

Ως δεύτερο ερώτημα, δίνεται η ίδια συνάρτηση για ολοκλήρωση, με την εξής διαφορά:

$$I = \int_{0}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{0}^{0.1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + .. + \int_{0.5}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = I_1 + .. + I_6$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα I εφαρμόζοντας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα τον κανόνα του Gauss-Seidel για 6 σημεία και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τον αντίστοιχο κανόνα του πρώτου μέρους. Στη συνέχεια να γραφεί το πρόγραμμα λύσης στο πρόγραμμα Matlab.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, εφαρμόζονται όλα όσα προαναφέρθηκαν στο πρώτο μέρος της πρώτης άσκησης, αλλάζοντας όμως τα όρια των ολοκληρωμάτων και συνεπώς τους συντελεστές των αντίστοιχων x. Έτσι, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

0,1 Gauss				
n	xi	wi	wig(xi)	
1	-0,9324695	0,17132449	3,29759E-10	
2	-0,6612094	0,36076157	8,76662E-08	
3	-0,2386192	0,46791396	1,28984E-06	
4	0,23861919	0,46791396	5,54662E-06	
5	0,66120939	0,36076157	1,0301E-05	
6	0,9324695	0,17132449	7,69165E-06	
		sum ->	2,49171E-05	

0,2 Gauss			
n	xi	wi	wig(xi)
1	-0,9324695	0,171324	9,41341E-06
2	-0,6612094	0,360762	2,865E-05
3	-0,2386192	0,467914	6,09992E-05
4	0,23861919	0,467914	9,8063E-05
5	0,66120939	0,360762	0,000108847
6	0,9324695	0,171324	6,38938E-05
		sum ->	3,69866E-04

Πίνακας 6 Προσέγγιση με την μέθοδο Gauss-Seidel

0,3 Gauss				
n	xi	wi	wig(xi)	
1	-0,9324695	0,17132449	7,0614E-05	
2	-0,6612094	0,36076157	0,000179978	
3	-0,2386192	0,46791396	0,000307096	
4	0,23861919	0,46791396	0,000406712	
5	0,66120939	0,36076157	0,000393633	
6	0,9324695	0,17132449	0,000214336	
		sum ->	1,57237E-03	

0,4 Gauss			
n	xi	wi	wig(xi)
1	-0,9324695	0,171324	0,000228885
2	-0,6612094	0,360762	0,000547437
3	-0,2386192	0,467914	0,000856353
4	0,23861919	0,467914	0,001042997
5	0,66120939	0,360762	0,000946805
6	0,9324695	0,171324	0,000496821
		sum ->	4,11930E-03

Πίνακας 7 Προσέγγιση με την μέθοδο Gauss-Seidel

0,5 Gauss				
n	xi	wi	wig(xi)	
1	-0,9324695	0,17132449	0,000521417	
2	-0,6612094	0,36076157	0,001206717	
3	-0,2386192	0,46791396	0,001801536	
4	0,23861919	0,46791396	0,00209348	
5	0,66120939	0,36076157	0,001830847	
6	0,9324695	0,17132449	0,000939727	
		sum ->	8,39372E-03	

0,6 Gauss			
n	xi	wi	wig(xi)
1	-0,9324695	0,171324	0,000975946
2	-0,6612094	0,360762	0,002213515
3	-0,2386192	0,467914	0,003209492
4	0,23861919	0,467914	0,003619058
5	0,66120939	0,360762	0,003088768
6	0,9324695	0,171324	0,00156231
		sum ->	1,46691E-02

Πίνακας 8 Προσέγγιση με την μέθοδο Gauss-Seidel

Το σύνολο και τελικό αποτέλεσμα ισούται με 2,91493E-02. Η απόκλιση σχετικά με το αποτέλεσμα του πρώτου υπολογισμού είναι ίση, και συνεπώς η απόκλιση είναι μηδενική.